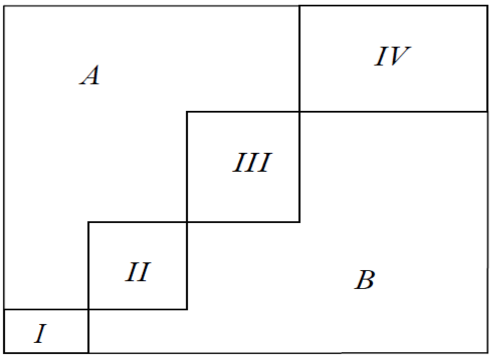
nacionalinė moksleivių akademija

Olimpiadą remia:
Kauno technologijos universitetas
Leidykla "Šviesa"

Penktoji Nacionalinės moksleivių akademijos 5–8 klasių mokinių matematikos olimpiada

8 klasė



1. Stačiakampis, kurio perimetras lygus 2016, padalintas į keturis stačiakampius I, II, III, IV ir į figūras A ir B (žiūrėkite brėžinį). Stačiakampių perimetrų santykis yra $P_I : P_{II} : P_{III} : P_{IV} = 1:3:5:7$. Kam lygi figūrų A ir B perimetrų suma?

Sprendimas. Pastebėsime, kad stačiakampių perimetrų suma yra lygi didžiojo stačiakampio perimetrui. Vadinasi, $P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} = 2016$. Tegu $P_I = x$. Tada $P_{II} = 3x$, $P_{III} = 5x$, $P_{IV} = 7x$. Sudarome lygtį $x + 3x + 5x + 7x = 2016$, iš kurios gauname, kad $x = 126$. Pastebėsime, kad $P_A + P_B = 2016 + P_{II} + P_{III}$. Tada $P_A + P_B = 2016 + 8x = 3024$.

Atsakymas: 3024.

2. Visi penkiaženkliai natūralieji skaičiai, kurių užraše kiekvienas iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 yra panaudotas lygiai vieną kartą, yra surašyti paeiliui didėjimo tvarka: 12345, 12354, 12435, ... Kelintas šioje eilėje yra skaičius 53421?

Sprendimas. Iš viso šioje sekoje yra $5·4·3·2·1=120$ skaičių. Mus dominantis skaičius yra paskutinis, kuris prasideda 53, ir po šio skaičiaus sekoje dar yra 6 skaičiai, prasidedantys skaitmenimis 54. Tuomet šioje sekoje skaičius 53421 yra 114 vietoje.

3. Penkiakampio ir šešiakampio kraštinių ilgiai centimetrais yra iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Yra žinoma, kad abiejų daugiakampių perimetrai yra lygūs. Be to, penkiakampio trumpiausios kraštinės ilgis yra lygus šešiakampio ilgiausios kraštinės ilgiui. Kam lygus šešiakampio trumpiausios kraštinės ilgis?

Sprendimas. Pažymėkime penkiakampio trumpiausios kraštinės ilgį raide *a*, tuomet šešiakampio ilgiausios kraštinės ilgis taip pat lygus *a*. Tuomet penkikampio perimetras lygus $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)=5a+10$, o šešiakampio perimetras lygus $a+(a-1)+(a-2)+(a-3)+(a-4)+(a-5)=6a-15$. Tuomet $5a+10=6a-15$ ir šešiakampio ilgiausia kraštinė $a=25$ cm, o šešiakampio trumpiausia kraštinė lygi $\boldsymbol{a}$**-5=20 cm**.

4. Duoti šeši eilute išsidėstę langeliai. Justas ir Paulius žaidžia tokį žaidimą: paeiliui į bet kurį tuščią langelį įrašo vieną skaitmenį. Pradeda Paulius. Jeigu, baigus surašyti skaitmenis, gautasis šešiaženklis skaičius dalijasi iš 13, tai laimi Justas. Kitu atveju – Paulius. Ar gali Justas, žaisdamas teisingai, visada laimėti, nepriklausomai nuo to kaip žaidžia Paulius?

Sprendimas. Justas turi taip įrašinėti skaitmenis, kad gautųsi šešiaženklis skaičius $\overline{abcabc}$, kuris yra lygus $1001\cdot\overline{abc}$. Kadangi 1001 dalijasi iš 13, tai gautas skaičius visada dalysis iš 13.

Atsakymas. Taip, Justas gali visada laimėti.

5. Atstumas tarp miestų A ir N yra lygus 25 km. Andrius su mašina išvažiavo iš miesto A į miestą N. Jis važiavo $75\frac{km}{h}$ greičiu, bet sustodavo prie kiekvieno šviesoforo ir laukdavo nuo 35 iki 40 sekundžių. Dėl to jo vidutinis kelionės iš A į N greitis buvo $60\frac{km}{h}$. Kiek šviesoforų savo kelyje sutiko Andrius?

Sprendimas. Pagal uždavinio sąlygą visame kelyje Andrius užtruko $25:60\,h=25$ minutes. Jei jis nestotų prie šviesoforų, tai jo kelionės iš A į N laikas būtų $25:75\,h=20$ minučių. Vadinasi, prie šviesoforų jis iš viso stovėjo 5 minutes, t. y. 300 sekundžių. Kadangi $300:8=37{,}5$, tai šviesoforų galėjo būti 8, jei prie kiekvieno iš jų Andrius prastovėjo po 37,5 sekundės (pavyzdžiui). Jei šviesoforų būtų mažiau nei 8, tai prie jų jis daugiausiai prastovėtų $7\cdot 40=280<300$ sekundžių, o jei šviesoforų būtų daugiau nei 8, tai prie jų jis mažiausiai prastovėtų $9\cdot 35=315>300$ sekundžių. Vadinasi, Andrius kelyje iš A į N sutiko 8 šviesoforus.

Atsakymas: 8.