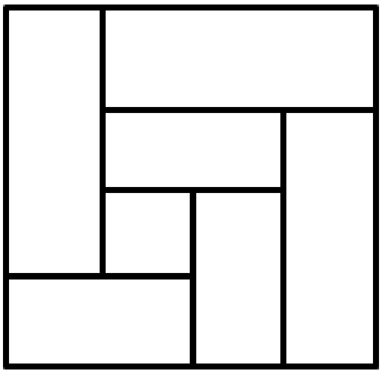
Olimpiadą remia:
Kauno technologijos universitetas
Leidykla “Šviesa“

Penktoji Nacionalinės moksleivių akademijos 5–8 klasių mokinių matematikos olimpiada

7 klasė

1. Andrius, panaudojęs tris vienodus didelius stačiakampius, tris vienodus mažesnius stačiakampius ir vieną kvadratą, kurio kraštinės ilgis lygus 1 cm, sudėjo kvadratą, kurio kraštinės ilgis lygus 13 cm (žiūrėkite brėžinį). Raskite stačiakampių matmenis.

(kraštinės brėžinyje nėra proporcingos atsakymui).



Sprendimas. Pastebėsime, kad kairioji kvadrato kraštinė susideda iš didžiojo stačiakampio ilgesniosios kraštinės ir mažojo stačiakampio trumpesniosios kraštinės, o dešinė kvadrato kraštinė – iš didžiojo stačiakampio trumpesniosios ir ilgesniosios kraštinių. Vadinasi, trumposios didžiojo ir mažojo stačiakampių kraštinės yra lygios. Jų ilgį pažymėkime a. Tada gauname, kad kvadrato kraštinė lygi $1+3a=13$. Iš čia gauname, kad kiekvieno stačiakampio trumpesniosios kraštinės ilgis lygus 4. Pastebėsime, kad mažesniojo stačiakampio ilgesnę kraštinę sudaro mažojo kvadrato kraštinė ir trumpesnioji mažesniojo stačiakampio kraštinė. Vadinasi, jos ilgis lygus $1+4=5$. Didelio stačiakampio ilgesnės kraštinės ilgį gausime iš kvadrato kraštinės atėmę mažesnio stačiakampio trumpesnę kraštinę, t. y. $13-4=9$. Vadinasi, stačiakampių matmenys yra 4x5 ir 4x9.

Atsakymas: 4x5, 4x9.

2. Kvailių šalyje apyvartoje yra 1, 2, 3, ..., 19 ir 20 soldų monetos (kitokios vertės nėra). Buratinas turėjo vieną monetą. Jis nusipirko ledų porciją ir grąžos gavo vieną monetą. Vėl nusipirko vieną tokių pat ledų porciją ir grąžos gavo tris skirtingų verčių monetas. Buratinas norėjo nusipirkti trečią tokių pat ledų porciją, tačiau tam pinigų neužteko. Kiek kainuoja viena ledų porcija?

Sprendimas. Grąža trijų skirtingų verčių monetomis yra ne mažesnė už $1+2+3=6$ soldus. Kadangi šių pinigų neužteko vienai ledų porcijai, tai ledų porcija kainuoja ne mažiau kaip 7 soldus. Daugiau kaip 7 soldus ledų porcija kainuoti negali, nes tada Buratinas už dvi ledų porcijas sumokėtų ne mažiau kaip $8+8=16$ soldų, o kadangi jis turėjo ne didesnės kaip 20 soldų vertės monetą, tai grąžos gauti trimis skirtingos vertės monetomis jis negalėjo. Vadinasi, ledų porcija kainuoja 7 soldus ir pirkimo procesas atrodo taip: $20-7=13$, $13-7=6=1+2+3$.

Atsakymas: 7 soldai.

3. Duota 13 išoriškai nesiskiriančių monetų. Iš jų 12 yra gerų, jų visų masės vienodos, o viena – padirbta, jos masė skiriasi nuo tikrųjų. Kaip, lėkštinėmis svarstyklėmis be svarelių, dviem svėrimais nustatyti ar padirbtoji moneta yra sunkesnė ar lengvesnė už tikras? Pačios monetos surasti nebūtina.

Sprendimas. Į kiekvieną svarstyklių lėkštęlę įdėkime po 6 monetas.

1) jei svarstyklės pusiausviros, tai netikroji moneta yra ta, kuri buvo neuždėta ant svarstyklių. Sulyginę ją su bet kuria pasvertąja moneta, sužinome ar ji yra lengvsnė ar sunkesnė už tikrąsias.

2) jeigu svarstyklės nėra pusiausviros, tai, sakykime, kad kairėje lėkštelėje yra lengvesnės monetos. Antruoju svėrimu pasverkime po tris monetas iš lengvesnės lėkštelės. Jeigu svarstyklės yra pusiausviros, tai visų šių monetų masė yra vienoda ir padirbtoji moneta yra dešiniojoje lėkštelėje ir yra sunkesnė už tikras. Jeigu svarstyklės nėra pusiausviros, tai netikroji moneta pirmame svėrime buvo kairjoje lėkštelėje ir ji yra lengvesnė negu tikros.

4. Raskite skaičiaus $1^2+2^2+\cdots+99^2$ paskutinį skaitmenį.

Sprendimas. Visų skaitmenų nuo 1 iki 9 kvadratai pasikartos po 10 kartų, todėl jų suma dalysis iš 10, t.y. jos paskutinis skaitmuo bus 0.

Atsakymas: paskutinis skaitmuo yra 0.

5. Uždara trajektorija, kurios ilgis yra 300 metrų, vienu metu iš tos pačios vietos priešingomis kryptimis startuoja Miško trolis, kurio greitis $100\frac{m}{\min}$ ir Kalnų trolis, kurio greitis $200\frac{m}{\min}$. Kiekvieną kartą, kai jie atsiduria vienoje vietoje, Kalnų trolis apsisuka ir pradeda bėgti priešinga kryptimi. Ar kada nors troliai susitiks starto vietoje? Jeigu taip, tai kokiu laiku po starto tai atsitiks pirmą kartą, jei ne, paaiškinkite kodėl.

Sprendimas. Tegu trolių starto vieta yra taškas A, o taškai B ir C yra atitinkamai už 100 ir 200 metrų nuo starto vietos pradine Miško trolio judėjimo kryptimi. Tada pirmas trolių susitikimas įvyks taške B po 1 minutės (300 metrų, suartėjimo greitis $(100+200)\frac{m}{\min}$). Po to suartėjimo greitis bus $200-100=100\left(\frac{m}{\min}\right)$, o atstumas tarp trolių vėl bus 300 metrų. Vadinasi, jie vėl susitiks taške B po 3 minučių. Po to atstumas tarp jų vėl bus 300 metrų, o suartėjimo greitis bus $300\frac{m}{\min}$, todėl po 1 minutės jie susitiks taške C. Analogiškai po 3 minučių jie vėl susitiks taške C, o dar po 1 minutės – taške A. Iš viso praeis $1+3+1+3+1=9$ minutės.

Atsakymas: po 9 minučių.