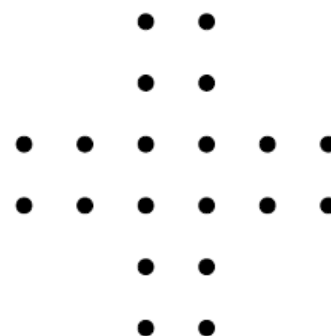


Penktoji Nacionalinės moksleivių akademijos 5–8 klasių mokinių matematikos olimpiada

6 klasė

1. Kiek daugiausiai kvadratų, kurių viršūnės yra duoti taškai, galima suskaičiuoti?

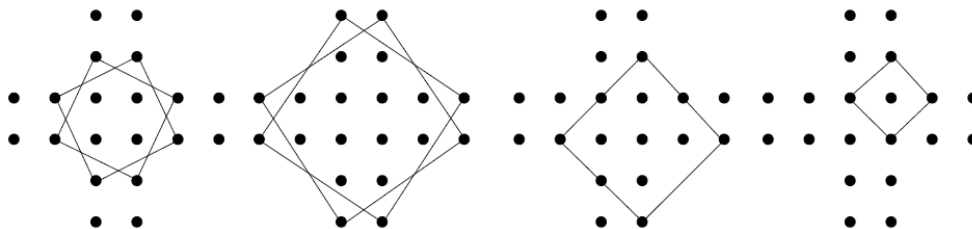


Sprendimas. Yra 9 kvadratai 1×1 , po 2 kvadratus iš pirmo ir iš antro brėžinių. Trečias brėžinys duoda

dar 4 kvadratus

(nubraižytą

kvadrata



galima pastumti per langelį aukštyn, į kairę ir aukštyn į kairę). Ketvirtas brėžinys duoda dar 4 kvadratus (nubraižytą kvadrata galima pastumti per langelį žemyn, į kairę ir žemyn į kairę). Iš viso gauname $9 + 2 + 2 + 4 + 4 = 21$ kvadrata.

Atsakymas: 21.

2. Lapės olą su paukščių kiemu jungia tiesus kelias. Iš olos į paukščių kiemą išbėgo lapė. Tuo pačiu metu ir tuo pačiu greičiu iš paukščių kiemo į lapės olą išbėgo šuo. Šuo pajautė lapę likus 100 metrų iki jos ir pradėjo bėgti triskart greičiau. Lapė pajautė šunį iki jo likus 60 metrų ir nuo jo atgal į olą pradėjo bėgti dukart didesniu greičiu. Ar lapė suspės pasislėpti oloje, jei tarp olos ir paukščių kiemo yra 300 metrų?

Sprendimas. Šuo pajus lapę, kai kiekvienas iš jų bus nubėgęs po 100 metrų, o atstumas tarp jų bus 100 metrų. Tuo momentu šuo padidins greitį 3 kartus. Lapė pajaus šunį, kai jis nubėgs dar 30 metrų, o lapė nubėgs 10 metrų. Tada atstumas tarp

jų bus 60 metrų ir tuo momentu lapė padidins greitį 2 kartus ir bėgs į olą. Lapei iki olos liks 110 metrų, o šuniui 170 metrų. Šuo bėgs 1,5 karto greičiau už lapę, todėl, kai lapė pasislėps oloje, t. y. nubėgs 110 metrų, šuo bus nubėgęs $110 \cdot 1,5 = 165$ metrus ir iki olos jam liks 5 metrai. Vadinasi, jis lapės nepavys ir lapė suspės pasislėpti oloje.

Atsakymas: suspės.

3. Vienoje šeimoje yra penki žmonės: Agnė, Berta, Cezarijus, Domas ir Einaras. Visų šeimos narių metų suma lygi 88. Be to Agnės ir Bertos metų suma lygi 39, Bertos ir Cezarijaus metų suma lygi 19, Cezarijaus ir Domo metų suma lygi 44, o Domo ir Einaro metų suma lygi 38. Nustatykite kiek metų kiekvienam šeimos nariui. Visų metai išreikšti sveikuoju skaičiumi.

Sprendimas. 1 būdas. Pažymėkime šeimos narių amžių atitinkamai A, B, C, D ir E. Yra žinoma, kad

$$A + B + C + D + E = 88, A + B = 39, B + C = 19, C + D = 44, D + E = 38.$$

$$\text{Tada } E = (A + B + C + D + E) - (A + B) - (C + D) = 88 - 39 - 44 = 5;$$

$$D = (D + E) - E = 33;$$

$$C = (C + D) - D = 11;$$

$$B = (B + C) - C = 8;$$

$$A = (A + B) - B = 31.$$

Taigi Agnė turi 31 metus, Berta – 8 metus, Cezarijus – 11 metų, Domas – 33 metus ir Einaras – 5 metus.

2 būdas. Agnės ir Bertos metų suma lygi 39, o Cezarijaus ir Domo metų suma lygi 44. Tad jų keturių metų suma lygi 83. Kadangi visų penkių žmonių metų suma lygi 88, tai Einaro metų skaičius yra $88 - 83 = 5$. Po to, žinodami metų sumą porose, gauname visų likusių žmonių metus.

4. Dviejose kortelėse užrašyti keturi skirtingi skaitmenys – po vieną kiekvienoje kortelės pusėje. Ar gali atsitikti taip, kad bet kuris dviženklis skaičius, kurį galima sudaryti iš šių kortelių, bus pirminis? (Neleidžiama apversti kortelės, t.y. iš 6 gauti 9 arba atvirkščiai).

Sprendimas. Visi skaičiai, kurie baigiasi 0, 2, 4, 6 arba 8 yra lyginiai, o tie, kurie baigiasi 5, dalijasi iš 5. Todėl tokie skaičiai nebus pirminiai. Tad lieka skaičiai 1, 3, 7 ir 9. Jeigu skaitmenys 3 ir 9 užrašyti skirtingose kortelėse, tai iš jų galima sudaryti skaičių 39, kuris yra sudėtinis. Jeigu jie yra vienoje kortelėje, tai antroje užrašyti skaitmenys 1 ir 7 ir tada galima sudaryti sudėtinį skaičių 91, kuris yra 7 ir 13 sandauga.

Atsakymas: negalima.

5. Mieste aplink parką yra ratu einanti gatvė. Joje gyvena trys klasės draugės – Miglė, Gabrielė ir Emilė. Iš Gabrielės namų einant pas Emilę pro Miglės namą, kelias yra triskart ilgesnis negu einant kita kryptimi. Nuo Miglės namų iki Emilės kelias pro Gabrielės namus yra dukart trumpesnis negu einant priešinga kryptimi. Kuris kelias nuo Gabrielės namų iki Miglės – pro Emilės namus ar priešinga kryptimi – yra trumpesnis? Kiek kartų?

Sprendimas. Apskritime pasižymėkim tris taškus M, G ir E, atitinkančius mergaičių vardus. Kadangi kelias nuo Gabrielės namų iki Emilės viena kryptimi yra triskart ilgesnis negu kita, tai viena dalis sudaro ketvirtadalį apskritimo, kita – tris ketvirtadalius. Taigi, lankas GE sudaro ketvirtadalį apskritimo. Kadangi nuo Miglės namų iki Emilės pro Gabrielės namus kelias dukart trumpesnis, tai jis sudaro trečdalį apskritimo, o kita kryptimi – du trečdalius. Tad lankas ME (pro G) yra trečdalis apskritimo. Tuomet lankas MG, reiškiantis trumpiausią atstumą tarp Miglės ir Emilės namų, lygus $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ apskritimo dalis. Tuomet kelias pro Emilės namus sudaro $\frac{11}{12}$ lanko. Taigi, nuo Gabrielės namų iki Miglės pro Emilės namus yra 11 kartų ilgesnis negu kita kryptimi.

Atsakymas: Kelias pro Emilės namus yra 11 kartų ilgesnis.